сколько людей….

ага, как будто завтра кр по твимсам

Таблица наличия номеров: **москва кабинет 658 ботаем**

вариант\номер	1	2	3	4	5	6
1/11/21	+	+	+	+	+	+
2/12/22	+	+	+	-	+	+
3/13/23	+	+	+	+	+	+-
4/14/24	+	+	+	+	+	+
5/15/25	-	+	+	+	+	+
6/16/26	+	+	+	+	+	+
7/17/27	-	-	+	+	+	+
8/18/28	+	+	+	+	-	+
9/19/29	-	-	-	-	+	+
10/20/30	+	+	+	+	-	-

А что с 9-м? ((Жопа там
Надо списать(

Вариант 1/11/21

№1 2:

Вариант 11

1) Четыре различимых шара случайным образом размещаются по трем ячейкам, ξ – число пустых ячеек. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Пусть распределение случайных величин задано таблицей

(ξ,η)	η		
ξ	-1	0	1
0	$1/4$	$3/8$	$1/8$
1	$1/12$	$1/8$	$1/24$

Вычислите $cov(\xi;\eta)$ и найдите распределение $\zeta = \xi^2\eta$.

3) Распределение случайной величины задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{1 \le \xi \le 1.5\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = (\xi-1)^2$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η— независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi^2 + \eta^2$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Совместная плотность распределения $p(x;y)$ случайных величин ξ и η при $0 \le y \le x$ определяется равенством $p(x;y) = e^{-x}$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите частные распределения. Являются ли данные случайные величины независимыми?

6) Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с распределениями $\xi_i \sim P_{\text{ois}}(\lambda_i)$, $i = 1,2,3$. Найдите $\mathbf{E}(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3|\eta)$, где $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

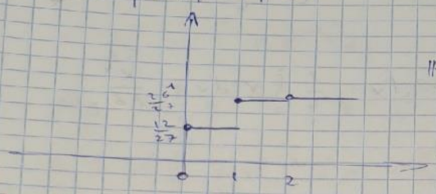
В I 1) 4 разл шарика 3 ячейки ξ - число пустых

ξ	0	1	2
P	$\frac{12}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{1}{27}$

$P(\xi=0) = \frac{3\cdot C_4^2\cdot 2}{3^4} = \frac{12}{27}$

$P(\xi=1) = \frac{3\cdot C_4^3\cdot 2 + 3\cdot C_4^2}{3^4} = \frac{14}{27}$

$P(\xi=2) = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}$



$E\xi = 1\cdot\frac{14}{27} + 2\cdot\frac{1}{27} = \frac{16}{27}$ $\quad E\xi^2 = 1\cdot\frac{14}{27} + 4\cdot\frac{1}{27} = \frac{18}{27}$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{18}{27} - \left(\frac{16}{27}\right)^2 = \frac{230}{729}$

2)

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
0	$1/4$	$3/8$	$1/8$
1	$1/12$	$1/8$	$1/24$

ξ	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

η	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E\xi = 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad E\eta = -1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

$E\xi\eta = -1\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot\frac{1}{24} = -\frac{1}{24}$

$cov(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = 0$

$\zeta = \xi^2\eta$

ζ	-1	0	1
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{24}$

№3:

Вар 11 N3

1) $p_\xi = \begin{cases} cx^3, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 cx^3 dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c \cdot x^4}{4}\Big|_0^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{F_\xi(x)} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^4}{16}; & 0 \le x \le 2 \\ 0; & x < 0 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\{1 \le \xi \le 1{,}5\} = F_\xi(1{,}5) - F_\xi(1) =$$

$$= \frac{81}{256} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{65}{256}}$$

2) $\eta = (\xi - 1)^2$

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{(\xi-1)^2 < x\} = \mathbb{P}\{1-\sqrt{x} < \xi < 1+\sqrt{x}\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\xi < 1+\sqrt{x}\} - \mathbb{P}\{\xi > 1-\sqrt{x}\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\xi < 1+\sqrt{x}\} - \mathbb{P}\{\xi < 1-\sqrt{x}\} + 1 =$$

$$= F_\xi(1+\sqrt{x}) - F_\xi(1-\sqrt{x}) + 1 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1+\sqrt{x})^4}{16} - \frac{(1-\sqrt{x})^4}{16} + 1, & x \in (0, 1] \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_\eta'(x) = \frac{4\cdot(\sqrt{x^3} + 3x + 3\sqrt{x} + 1) - 4(\sqrt{x^3} - 3x + 3\sqrt{x} - 1)}{16 \cdot 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{6x+2}{4\cdot 2\sqrt{x}} \Rightarrow \left.\begin{cases} \frac{3x+1}{4\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}\right| = \boxed{p_\eta(x)}$$

$$\boxed{E\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x+1}{4\sqrt{x}} \cdot x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (3\sqrt{x^3} + \sqrt{x})\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\cdot 3 \cdot x^{5/2} + \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{7}{15}}$$

$$E\eta^2 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{3x+1}{\sqrt{x}} \cdot x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot x^{7/2} + \frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{35}$$

$$\boxed{D\eta} = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{11}{35} - \frac{49}{225} = \boxed{\frac{152}{1575}}$$

№4, 5:

4) ξ, η − н.с.в $\sim N(0,1)$

$\zeta = \xi + \eta$

$$F_\zeta = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{x+y<z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr =$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{z}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = -\int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2}}$$

$$p_\zeta = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z \geq 0$$

$$E\zeta = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z}{2}} dz = -\frac{4}{2} \int_0^{+\infty} z\, d e^{-\frac{z}{2}} = -\left(z e^{-\frac{z}{2}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{2}} dz \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{2}} dz = -2 e^{-\frac{z}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 2$$

$$D\zeta = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 8 - 4 = 4$$

5) $p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$p_\xi(x) = \int_0^x e^{-x} dy = x e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$p_\eta(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_y^{+\infty} = e^{-y}, \quad y \geq 0$$

$p_{\xi,\eta}(x,y) \neq p_\xi(x)\, p_\eta(y) \Rightarrow \xi$ и η зависимы

см. следующее фото - в принципе в 4 номере можно написать прямо так (k = 2)

- **Распределение хи – квадрат** $\chi^2(k)$ с k степенями свободы, $k \in \mathbb{N}$.

  Случайная величина $X \sim \chi^2(k)$, если ее плотность

$$p(x;k) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})2^{\frac{k}{2}}} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = k, \quad \mathbf{D}X = 2k, \quad \mathbf{E}(X-k)^3 = 8k, \quad f(t) = (1-2it)^{-\frac{k}{2}}.$$

  Данное распределение имеет случайная величина

$$X = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^2,$$

  где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые случайные величины с распределением $N(0,1)$. Это распределение совпадает с распределением $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$. (Задачи 1.31, 1.44.)

№6 Вар 1.

$\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$

$$E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \xi_1+\xi_2) = 2E(\xi_1 \mid \xi_1+\xi_2) + 3E(\xi_2 \mid \xi_1+\xi_2) + E(\xi_3 \mid \xi_1+\xi_2)$$

$$P(\xi_1 = k \mid \xi_1+\xi_2 = n\} = \frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}} = \underbrace{C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}}_{B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}$$

$$E(\xi_1 \mid \xi_1+\xi_2 = n) = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$E(\xi_2 \mid \xi_1+\xi_2 = n) = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(\xi_3 = k \mid \xi_1+\xi_2 = n) = P\{\xi_3 = k\} \Rightarrow E(\xi_3 \mid \xi_1+\xi_2 = k) = \lambda_3$$

$$(*)\ E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \eta) = \frac{2\lambda_1+3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\eta + \lambda_3$$

$$E(*) = \frac{2\lambda_1+3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} E\eta + \lambda_3 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$$

$$D(*) = \left(\frac{2\lambda_1+3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 D\eta = \frac{(2\lambda_1+3\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Вариант 2/12/22

Вариант 2

1) Спортсмену для выполнения квалификации дается не более трех попыток. Вероятность выполнить квалификацию в каждой попытке равна 0.9. Пусть ξ — число выполненных спортсменом попыток. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Случайные величины ξ и η независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти распределение $\zeta = \xi + \eta$. Вычислить ковариацию $cov(\xi; \xi + \eta)$.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^\xi$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$, $\mathbf{P}\{-0.5 \le \xi \le 3\}$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины, распределенные равномерно на $[-1, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi - \eta$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Совместная плотность распределения $p(x; y)$ случайных величин ξ и η определяется равенством $p(x; y) = cxy$ при $0 \le x,\ y \le 1$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите константу c, вычислите $\mathbf{P}\{\eta > \xi + 1/2\}$.

6) Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с распределениями $\xi_i \sim N(a; \sigma^2),\ i = 1, 2, 3$. Найдите $\mathbf{E}(2\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 | \eta)$, где $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

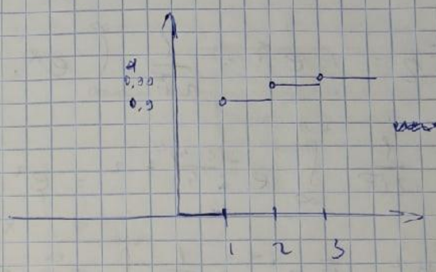
№ 1 2 3 5:

В 22 = 2

1) $p = 0,9 \quad q = 0,1$

$\mathbb{P}\{\xi = k\} = q^{k-1} p$

ξ	1	2	3
P	0,9	0,09	0,01



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0,9, & x \in (1,2] \\ 0,99, & x \in (2,3] \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$\mathbb{E}\xi = 0,9 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3 = 1,11$

$\mathbb{E}\xi^2 = 0,9 + 0,09 \cdot 4 + 0,01 \cdot 9 = 1,35$

$D\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 0,1179$

2) $\xi \sim Pois(\lambda_1), \ \eta \sim Pois(\lambda_2)$

$\zeta = \xi + \eta \ ?$

$$\mathbb{P}(\zeta = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{\xi = k, \eta = n-k\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\xi = k)\mathbb{P}(\eta = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{(n-k)} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^n \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$cov(\xi, \xi + \eta) = cov(\xi, \xi) + \overset{0}{cov(\xi, \eta)} =$$

$$= D(\xi) = \lambda_1$$

3) $p_\xi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{4}} \sim N(1, 2)$

$\eta = e^\xi$

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(e^\xi < x) = \mathbb{P}(\xi < \ln x) = F_\xi(\ln x)$$

$p_\eta = \frac{1}{x}\cdot p_\xi(\ln x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-1)^2}{4}}$

$E\eta = Ee^\xi = \frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}dx = \frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2+6x-1}{4}}dx =$

$= \frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-3)^2}{4}+2} = e^2\cdot\frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(x-3)^2}{4}}dx = e^2$

$E\eta^2 = Ee^{2\xi} = \frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x}\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{4}} = e^6\cdot\frac{1}{2\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-5)^2}{4}}dx =$

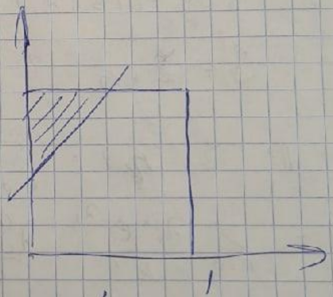
$= e^6$

$D\eta = E\xi^2-(E\xi)^2 = e^6 - e^4$ $\qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

$P\{-0{,}5\le\xi\le3\} = F_\xi(3) - F_\xi(-0{,}5) = \Phi\left(\frac{3-1}{\sqrt2}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}5-1}{\sqrt2}\right) =$

$= \Phi(\sqrt2) - \Phi(-\frac34\sqrt2)$

5) $p(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0\le x,y\le1\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$



$\iint_{0\le x,y\le1} cxy\,dx\,dy = c\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy =$

$= c\cdot\frac12\cdot\frac12 = \frac c4 = 1 \Rightarrow c = \frac14$

$P\{\eta > \xi + \frac12\} = \frac14\iint_{y>x+\frac12} xy\,dx\,dy = \frac14\int_0^{\frac12} x\,dx\int_{x+\frac12}^1 y\,dy =$

$= \frac18\int_0^{\frac12}\left((x+\frac12)^2-1\right)x\,dx = \frac18\int_0^{\frac12} x^3+x^2+\frac14 x\,dx =$

$= \frac18\cdot\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^{\frac12} = \frac18\cdot\frac{17}{192}$

ошибка: c = 4

№6

№6: вар. 2

ξ_1, ξ_2, ξ_3 – нез. с.в. т.ч. $\xi_i \sim N(a, \sigma^2)$

$M = E(2\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 \mid \eta) = ?$ где $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$\parallel$

$2E(\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2) - E(\xi_2 \mid \xi_1 + \xi_2) + 3E(\xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2)$

$f = (x, y) = (x, x+y)$
$f^{-1}(x, y) = (x, y-x)$

Рассм. $p_{\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2 = y}(x) = \dfrac{p_{\xi_1, \xi_1+\xi_2}(x, y)}{p_{\xi_1+\xi_2}(y)} = \dfrac{p_{\xi_1, \xi_2}(x, y-x)}{p_{\xi_1+\xi_2}(y)}$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2a)^2}{4\sigma^2}}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{A} \ \circleddash$$

т.к. $p_{\xi_1+\xi_2}(y) \sim N(2a, 2\sigma^2)$

$$A = \frac{-(x^2-2ax+a^2) - (y^2+x^2+a^2-2ay-2xy+2ax)}{2\sigma^2} + \frac{y^2-4ay+4a^2}{4\sigma^2}$$

$$= \frac{-(4x^2+4a^2+2y^2-4ay-xy)+y^2-4ay+4a^2}{4\sigma^2} =$$

$$= \frac{y^2+xy-4x^2}{4\sigma^2} =$$

$$= -\frac{(2x-y)^2}{4\sigma^2} = \frac{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}{\sigma^2}$$

$$\circleddash \left\{\tilde{\sigma} := \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_1 \mid \xi_1+\xi_2 \sim N\left(\frac{y}{2}, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$E(\xi_1 \mid \xi_1+\xi_2) = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$$

Аналогично $E(\xi_2 \mid \xi_1+\xi_2) = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$

$$E(\xi_3 \mid \xi_1+\xi_2) = E\xi_3 = a$$

Итого: $M = \xi_1+\xi_2 - \frac{3}{2}(\xi_1+\xi_2) + 3a =$

$$= \frac{\xi_1+\xi_2}{2} + 3a = \frac{1}{2} + 3a$$

Дисперсия посчитана ниже

$\Rightarrow E(*) = 2\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} + 3a = \frac{\eta}{2} + 3a$

$p_\eta \sim N(2a; 2\sigma^2)$

$\Rightarrow E(E(*)) = a + 3a = 4a$

$D(E(*)) = \frac{1}{4} 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

Вариант 3/13/23

Вариант 3

1) Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет единица. Пусть ξ — число проведенных бросаний. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2) Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	1/6	1/12	1/12
1	1/3	1/6	1/6

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi\eta$. Вычислить $cov(\xi\eta, 2\xi - \eta)$.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-0.25 \le \xi \le 0.75\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta$, $\mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины с одинаковым показательным распределением с параметром $a > 0$:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \dfrac{\xi}{\xi + \eta}$, $\mathbf{E}\zeta$, $\mathbf{D}\zeta$.

5) Совместная плотность распределения $p(x;y)$ случайных величин ξ и η определяется равенством $p(x;y) = c$ при $\{(x,y) \mid |x| + |y-1| \le 1\}$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите константу c, вычислите $\mathbf{P}\{(\xi-1)^2 + \eta^2 \le 1\}$. Какую плотность имеет случайная величина ξ?

6) Совместная плотность распределения $p(x;y)$ случайных величин ξ и η при $0 \le y \le x$ определяется равенством $p(x;y) = e^{-x}$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите $\mathbf{E}(\xi|\eta)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

Вариант 3.

1. ξ – число провед. бросаний кости.

ξ	1	2	...
	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	...

$\uparrow$ $P\{\xi=1\}$ $\quad$ $\uparrow$ $P\{\xi=2\}$

$$P\{\xi=k\} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$F_\xi(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 6\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}$$

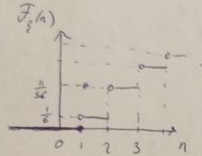


График примерный, без масштаба

Это геометрическое распределение, поэтому $E\xi = \frac{1-p}{p} = \frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$

$$D\xi = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = \frac{5\cdot \cancel{36}}{\cancel{6}} = 30.$$

2.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\gamma = \xi\eta$

$\gamma = \{-1, 0, 1\}$

γ	-1	0	1
	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

$$P\{\gamma=-1\} = P\{\xi=1,\eta=-1\} + P\{\xi=-1,\eta=1\} = \frac{1}{3}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P\{\gamma=0\} = P\{\xi=-1,\eta=0\} + P\{\xi=1,\eta=0\} = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P\{\gamma=1\} = P\{\xi=-1,\eta=-1\} + P\{\xi=1,\eta=1\} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

	$2\xi-\eta \backslash \xi\eta$	-1	0	1
$(\xi=-1,\eta=1)$	-3	$\frac{1}{12}$	0	0
$(\xi=-1,\eta=0)$	-2	0	$\frac{1}{12}$	0
$(\xi=-1,\eta=-1)$	-1	0	0	$\frac{1}{6}$
$(\xi=1,\eta=1)$	1	0	0	$\frac{1}{6}$
$(\xi=1,\eta=0)$	2	0	$\frac{1}{6}$	0
$(\xi=1,\eta=-1)$	3	$\frac{1}{3}$	0	0

$$\mathrm{cov}(\xi\eta, 2\xi-\eta) = E(\xi\eta\cdot(2\xi-\eta)) - E\xi\eta\cdot E(2\xi-\eta) =$$

$$= \left(3\cdot\frac{1}{12}+0+\frac{1}{6}(-1)+\frac{1}{6}\cdot 1+0-3\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{12}\cdot(-1)+0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot 1\right)\cdot\left(-3\cdot\frac{1}{12}-2\cdot\frac{1}{12}-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{6}}-1\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}+\right.$$

$$\left.+1\right) = -\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\cdot\frac{11}{12} = \frac{11}{144}-\frac{3}{4} = -\frac{97}{144}.$$

3.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases} . \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = 1 \Leftrightarrow c\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow c\left(1-\frac{1}{3}\right) - c\left(-1+\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$c\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}.$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-y^2)dy = \left(\frac{3}{4}y - \frac{y^3}{4}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}x - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}.$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ -\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\mathbb{P}\{-0{,}25 \le \xi \le 0{,}75\} = F_\xi(+0{,}75) - F_\xi(-0{,}25) = 0{,}95703125 - 0{,}31640625$$

$$= 0{,}640625.$$

$\eta = \xi^2 + 1$ $\quad 1 \le x \le 2$:

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{\xi^2 + 1 < x\} = \mathbb{P}\{\xi^2 < x-1\} =$$

$$= \mathbb{P}\{-\sqrt{x-1} < \xi < \sqrt{x-1}\} = F_\xi(\sqrt{x-1}) - F_\xi(-\sqrt{x-1}).$$

$$p_\eta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} p_\xi(\sqrt{x-1}) + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} p(-\sqrt{x-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left(p_\xi(\sqrt{x-1}) +\right.$$

$$\left.+ p_\xi(-\sqrt{x-1})\right) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left(\frac{3}{4}(1-(x-1)) + \frac{3}{4}(1-(x-1))\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2-x}{\sqrt{x-1}}.$$

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+1)p_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

$$E\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^4+2x^2+1)p_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^4+2x^2+1)\frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(-x^6 - x^4 + x^2 + 1)dx =$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{35}{105} - \frac{36}{105}\right) =$$

$$= \frac{104}{105}\cdot\frac{3}{2} = \frac{52}{35}$$

$$D\eta = \frac{52}{35} - \frac{36}{25} = \frac{260-252}{175} = \frac{8}{175}.$$

4. ξ, η – н.с.в. $\quad p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad p_\eta(y) = \begin{cases} ae^{-ay}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

$\gamma = \dfrac{\xi}{\xi + \eta}$

$\dfrac{x}{x+y} < z$

$x(1-z) < yz$

$x < y\dfrac{z}{1-z}$

$0 \le z \le 1$:

$$F_\gamma(z) = \iint\limits_{\frac{x}{x+y} < z} a^2 e^{-a(x+y)}\,dx\,dy = a^2 \int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy \int_0^{y\frac{z}{1-z}} e^{-ax}\,dx =$$

$$= a^2 \int_0^{+\infty} -\frac{1}{a} e^{-ay} \cdot \left(e^{-ay\frac{z}{1-z}} - 1\right) dy =$$

$$= a \int_0^{+\infty} \left(e^{-ay} - e^{-ay\frac{1}{1-z}}\right) dy = a\left(-\frac{1}{a} e^{-ay} + \frac{1-z}{a} e^{-ay\frac{1}{1-z}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - (-1 + 1 - z) = z, \quad 0 \le z \le 1$$

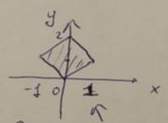
$p_\gamma(z) = F'_\gamma(z) = 1, \quad 0 \le z \le 1 \qquad p_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

равномерное распределение

$E\gamma = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$D\gamma = \dfrac{(1-0)^2}{12} = \dfrac{1}{12}$.

5. $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} c, & |x| + |y-1| \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

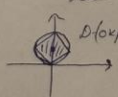


$\iint\limits_{|x|+|y-1|} c\,dx\,dy = 1 \iff c \cdot S = 1$, где S – площадь $\quad (S = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2)$

$c \cdot 2 = 1 \iff c = \frac{1}{2}$.

$$\mathbb{P}\{(\xi-1)^2 + \eta^2 \le 1\} \left(= \iint\limits_{(x-1)^2+y^2 \le 1} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy\right) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} dx\,dy =$$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$



D (окр. с центром в (0,1) ∩ с фигурой $|x|+|y-1| \le 1$)

Если $x \ge 0$:

$|y-1| \le 1-x \quad x-1 \le y-1 \le 1-x$

$x \le y \le 2-x$

$$p_\xi(x) = \int_x^{2-x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}(2-x-x) = 1-x$$

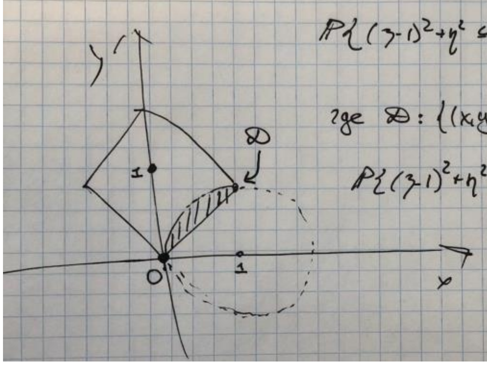
$x < 0$: $\quad |y-1| \le 1+x \quad -x-1 \le y-1 \le x+1$

$-x \le y \le x+2$

$$p_\xi(x) = \int_{-x}^{x+2} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}(x+2+x) = x+1$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

в последнем, кажется, ошибка: окружность должна быть с центром (1,0), а не (0,1). Исправлено ↓ ↓ ↓



$\mathbb{P}\{(\xi-1)^2 + \eta^2 \le 1\} = \iint\limits_{D} p(x,y)\,dx\,dy$,

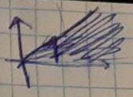
где $D: \{(x,y): (x-1)^2 + y^2 \le 1, (x,y) \in \Omega\}$

$\mathbb{P}\{(\xi-1)^2 + \eta^2 \le 1\} = S(D) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) =$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

б) $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \\ 0 \end{cases}$



$p_\xi(x) = \int_0^{x} e^{-x}\, dy = e^{-x}(x-1)$

$p_\eta(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x}\, dx = -(0 - e^{-y}) = \begin{cases} e^{-y} \\ 0 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -(0-1) = 1$

$E(\eta \mid \xi) = \int_0^{x} y \cdot \frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}\, dy = \int_0^{x} \frac{y}{e^{-x}(x-1)}\, dy =$

$= \frac{1}{(x-1)} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{x^2}{2(x-1)}.$

В8 №6

$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad E(\xi \mid \eta) - ?$

$D(\xi \mid \eta) - ?$

$p_{\xi\mid\eta} = p(x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,p)}{p_\eta(p)}$

$p_\eta(x) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = -(e^{-x})\Big|_y^{+\infty} = e^{-y}, \quad y \geq 0$

$p_{\xi\mid\eta} = p(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-y}}, \quad 0 \leq p \leq x$

$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-y}}\, dx = e^{y} \int_y^{+\infty} x e^{-x} dx = e^{y}\left(-(e^{-x} x)\Big|_y^{+\infty} - (e^{-x})\Big|_y^{+\infty}\right) = y+1$

$\Rightarrow E(\xi \mid \eta) = \eta + 1$

$E(\eta+1) = E\eta + E1 = E\eta + 1 = 1+1 = 2.$

Ответ:

$E\eta = \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} dy = \left(-(y \cdot e^{-y})\Big|_0^{+\infty} - (e^{-y})\Big|_0^{+\infty}\right) = 1$

$D(\eta+1) = D(\eta) = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 2 - 1 = 1$

$E\eta^2 = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \left(-(y^2 \cdot e^{-y})\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2y e^{-y} dy = 2$

вариант 4/14/24

Вариант 4

1) В коробке находятся 3 стандартные и 2 нестандартные детали. Мастер случайным образом отбирает детали до тех пор, пока не наберет 2 стандартные. Пусть ξ — число опробованных деталей. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Игральная кость брошена 2 раза. Пусть ξ— число, выпавшее первый раз, η —максимальное из двух выпавших чисел. Найти совместное распределение ξ и η. Вычислить ковариацию ξ и η.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c(1-|x|), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-0.25 \le \xi \le 0.5\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi| - 1$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ распределена равномерно на $[0,1]$, а η имеет равномерное распределение на $[-1,1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi - \eta$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет совместную плотность распределения

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Найдите плотность распределения случайного вектора (η_1, η_2), где $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2$. Вычислите $\mathbf{E}\,\eta_1$, $\mathbf{D}\,\eta_1, cov(\eta_1, \eta_2)$.

6) Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с распределениями $\xi_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$. Найдите $\mathbf{E}(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 | \eta)$, где $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

Вариант 4.

1. 3-ст. д. и 2-н. д.

ξ	1	2	3	4	5
	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0

$\mathbb{P}\{\xi=2\} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

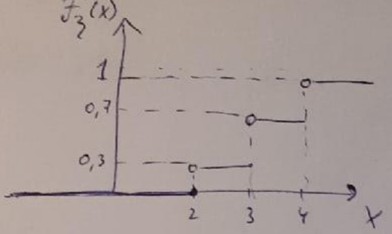
$\mathbb{P}\{\xi=3\} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} =$

$= 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}\{\xi=4\} = \underset{с}{\frac{3}{5}}\cdot\underset{н}{\frac{2}{4}}\cdot\underset{н}{\frac{1}{3}}\cdot\underset{с}{\frac{2}{2}} + \underset{н}{\frac{2}{5}}\cdot\underset{с}{\frac{3}{4}}\cdot\underset{н}{\frac{1}{3}}\cdot\underset{с}{\frac{2}{2}} +$

$+ \underset{н}{\frac{2}{5}}\cdot\underset{н}{\frac{1}{4}}\cdot\underset{с}{\frac{3}{3}}\cdot\underset{с}{\frac{2}{2}} = 3\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}7, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$



$E\xi = 2\cdot\frac{3}{10} + \frac{3\cdot 2}{5} + 4\cdot\frac{3}{10} = 3$

$E\xi^2 = 4\cdot\frac{3}{10} + 9\cdot\frac{2}{5} + 16\cdot\frac{3}{10} = 9{,}6$

$D\xi = 9{,}6 - 9 = 0{,}6$.

2. ξ - число выпавшее 1ый раз; η - макс. из двух выпавших

$\eta \backslash \xi$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$

$cov(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta =$

$= \frac{1}{36}\cdot(1+2+\ldots+6+2\cdot2\cdot2+(3+4+\ldots+6)\cdot 2 +$

$+ 3\cdot3\cdot3 + 3\cdot(4+5+6) + 4\cdot4\cdot4 + 4\cdot(5+6) +$

$+ 5\cdot5\cdot5 + 5\cdot6 + 6\cdot6\cdot6) -$

$- \frac{1}{36}(6 + 2\cdot6 + 3\cdot6 + \ldots + 6\cdot6)\cdot\frac{1}{36}\,\times$

$\times(1 + 2\cdot(1+2) + 3\cdot(1+1+3) + 4\cdot7 + 5\cdot9 + 6\cdot11) = \frac{1}{36}\cdot(21 + 8 + 36 + 27 + 45 +$

$+ 64 + 44 + 125 + 30 + 216) - \frac{1}{6}\cdot21\cdot\frac{1}{36}\cdot(1+6+15+28+45+66) =$

$= \frac{1}{36}\cdot616 - \frac{1}{6}\cdot21\cdot\frac{1}{36}\cdot161 = \frac{525}{360} = \frac{105}{72} = \frac{35}{24}$.

3. $p_\xi(x) = \begin{cases} c(1-|x|), & x\in[-1,1] \\ 0, & x\notin[-1,1] \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} c(1-|x|)\,dx = 1 \Leftrightarrow 2\int_0^1 c(1-x)\,dx = 1 \Leftrightarrow 2c\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$

$= 1 \Leftrightarrow 2c\cdot\frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow c = 1$

$-1 \leq x \leq 1$:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\,dy = \int_{-1}^{x} p_\xi(y)\,dy$$

$-1 \leq x \leq 0$:

$$F_\xi(x) = \int_{-1}^{x} (1+y)\,dy = y + \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$0 < x \leq 1$:

$$F_\xi(x) = F_\xi(0) + \int_0^x (1-y)\,dy = \frac{1}{2} + \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\cancel{E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx = 0}$$

$$\cancel{D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx}$$

$$\cancel{= 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}}.$$

$$\mathbb{P}\{-0{,}25 \leq \xi \leq 0{,}5\} = F_\xi(0{,}5) - F_\xi(-0{,}25) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{5}{32} =$$

$$= \frac{19}{32}.$$

$z > -1$:

$\eta = |\xi| - 1$ $\quad F_\eta(z) = \mathbb{P}\{\eta < z\} = \mathbb{P}\{|\xi| - 1 < z\} = \mathbb{P}\{-z-1 < \xi < z+1\} =$

$$= F_\xi(z+1) - F_\xi(-z-1)$$

$$p_\eta(z) = p_\xi(z+1) + p_\xi(-z-1)$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 2 - 2|x+1|, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$E\eta = \int_{-1}^{1} (|x|-1)(1-|x|)\,dx = -\int_{-1}^{1} (|x|-1)^2\,dx =$$

$$= -2\int_0^1 (x-1)^2\,dx = -2\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx =$$

$$= -2\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

$$E\eta^2 = \int_{-1}^{1} (|x|-1)^2(1-|x|)\,dx = -\int_{-1}^{1} (|x|-1)^3\,dx = -2\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx = -2\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2} - 1\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

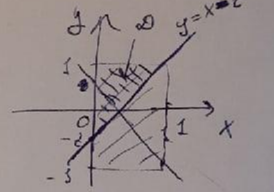
$$D\eta = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

4. ξ, η – н.с.в.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \qquad p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \in [-1,1] \\ 0, & y \notin [-1,1] \end{cases}.$$

$\gamma = \xi - \eta$

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0,1],\ y \in [-1,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$F_\gamma(z) = \iint\limits_{x-y<z} p(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} dx\,dy$$

$$F_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & z \le -1 \\ \frac{1}{4}\cdot(1+z)^2, & -1 < z \le 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot((1+z)+z), & 0 < z \le 1 \\ 1 - \frac{1}{4}(z-2)^2, & 1 < z \le 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases} \qquad F_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & z \le -1 \\ \frac{(1+z)^2}{4}, & -1 < z \le 0 \\ \frac{2z+1}{4}, & 0 < z \le 1 \\ \frac{-z^2+4z}{4}, & 1 < z \le 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases}$$

$$p_\gamma(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{2}, & -1 \le z \le 0 \\ \frac{2}{4}, & 0 < z \le 1 \\ \frac{-2z+4}{4}, & 1 < z \le 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_\gamma(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\frac{x+1}{2}dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx + \int_1^2 x\cdot\frac{-x+2}{2}dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{x^2+x}{2}dx + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 + \int_1^2 \frac{-x^2+2x}{2}dx = \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{4} + \left(\frac{-x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{6} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{8}{6} + \frac{4}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E\gamma^2 = \int_{-1}^{0} x^2\frac{x+1}{2}dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx + \int_1^2 x^2\frac{-x+2}{2}dx = \left(\frac{x^4}{8}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + \left(\frac{-x^4}{8}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{6} - 2 + \frac{8}{3} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$D\gamma = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

5.

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

$\eta_1 = \xi_1 - \xi_2 \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 \quad \Rightarrow \xi_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \quad \xi_2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}$

$|J_\psi| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \qquad p(y_1, y_2) = p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x_1+x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}{8}} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4}}$

$p_{\eta_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x^2+z^2}{4}} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} dz = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$ ← нормально распредел.

$E\eta_1 = 0 \qquad D\eta_1 = \sigma^2 = 2.$

$\Downarrow$

η_1 и η_2 – независ., значит $\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0.$

6.

$E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 | \eta) = 2E(\xi_1 | \xi_1 + \xi_2) + 3E(\xi_2 | \xi_1 + \xi_2) + E(\xi_3 | \xi_1 + \xi_2) =$

$= 2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot (\xi_1 + \xi_2) + 3 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(\xi_1 + \xi_2) +$

$+ E\xi_3 = 2(\xi_1 + \xi_2) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(\xi_1 + \xi_2) + \lambda_3$

$E(E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 | \eta)) = E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3) = 2E\xi_1 + 3E\xi_2 + E\xi_3 =$

$= 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$

№6 Вар 1.

$\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$

$E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2) = 2E(\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2) + 3E(\xi_2 \mid \xi_1 + \xi_2) +$
$+ E(\xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2)$

$$P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}} = \underbrace{C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}}_{B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}$$

$$E(\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$E(\xi_2 \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$P(\xi_3 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = P\{\xi_3 = k\} \Rightarrow E(\xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2 = k) = \lambda_3$

$$(*)\ E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \eta) = \frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\eta + \lambda_3$$

$$E(*) = \frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} E\eta + \lambda_3 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$$

$$D(*) = \left(\frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 D\eta = \frac{(2\lambda_1 + 3\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Вариант 5/15/25

Вариант 15

1) Четыре **неразличимые** частицы распределяются по трем ячейкам. Пусть ξ — число пустых ячеек. Считая все различимые распределения равновероятными, составьте таблицу распределения ξ, постройте график ее функции распределения, вычислите $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2) Случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметрами p_1 и p_2 соответственно:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_1(1-p_1)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$$

Найти распределение случайной величины $\zeta = \min(\xi, \eta)$.

3) Функция распределения случайной величины ξ равна

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \dfrac{1}{\xi}$. Вычислить $\mathbf{E}\,\eta$, $\mathbf{D}\,\eta$, $\mathbf{P}\{-1 \le \eta \le \sqrt{3}\}$.

4) Две случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Z = |\xi - \eta|$. Вычислить $\mathbf{E}\,Z$, $\mathbf{D}\,Z$.

5) Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) равномерно распределен на множестве
$\{(x;y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$. Какое распределение (укажите плотность)
имеют случайные величины ξ_1 и ξ_2? Вычислите $\mathbf{P}\{\xi_2 - \xi_1 > 1\}$.

6) Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины с распределе-
ниями $\xi_i \sim P_{ois}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$. Найдите $\mathbf{E}(3\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 | \eta)$, где $\eta = \xi_1 + \xi_2$.
Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

№2:

$$\mathbb{P}\{\min(\xi,\eta)<k\}=\mathbb{P}\{\xi<k\}+\mathbb{P}\{\eta<k\}-\mathbb{P}\{\xi<k,\eta<k\}=$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}p_1(1-p_1)^{i-1}}_{\Pi_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}p_2(1-p_2)^{i-1}}_{\Pi_2}-\Pi_1\cdot\Pi_2=$$

$$=1-(1-p_1)^{k-1}+1-(1-p_2)^{k-1}-1+(1-p_2)^{k-1}+(1-p_1)^{k-1}+$$

$$-(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}=1-(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}\{\min(\xi,\eta)=k\}=\mathbb{P}\{\min(\xi,\eta)<k+1\}-\mathbb{P}\{\min(\xi,\eta)<k\}=$$

$$=\cancel{1}-q_1^k q_2^k\cancel{-1}+q_1^{k-1}q_2^{k-1}=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2)$$

№3 (это номер 4 из варианта 1 из методички):

4. Найдем сначала плотность распределения случайной величины ξ

$$p_\xi(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Эта плотность отлична от 0 для всех , случайная величина η может принимать любые значения кроме 0. Кроме того замечаем, что преобразование случайных величин взаимно обратно, поэтому можно применить формулу (2.3), получим

$$p_\eta(x)=\frac{1}{x^2}\frac{1}{\pi(1+1/x^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

что снова соответствует распределению Коши. Для этого распределения математическое ожидание и дисперсия не существуют.

Ответ: $p_\eta(x)=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{\pi(1+1/x^2)}=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, математическое ожидание и дисперсия не существуют.

№4:

N5.

$\xi, \eta \sim N(0,1)$

$\zeta \sim N(0, 2)$, $p_\zeta(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$

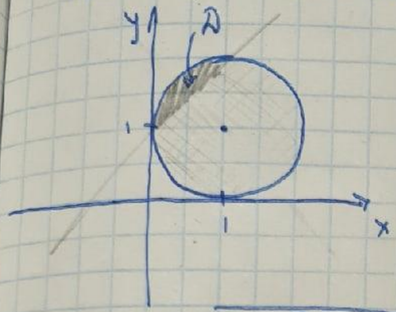
$F_Z(z) = \int\limits_{-z}^{z} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\frac{x^2}{4}} dx$

$p_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad x > 0$

$EZ = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $DZ = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

№5:

$(\xi_1, \xi_2) \sim U\{(x,y): (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\} =: M$



$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in M \\ 0, & (x,y) \notin M \end{cases}$$

$$p_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\sqrt{1-(x-1)^2}+1}^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{2\sqrt{1-x^2+2x-1}}{\pi} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\pi}$$

$$p_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\sqrt{1-(y-1)^2}+1}^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{\sqrt{2y-y^2}}{\pi}$$

$$P\{\xi_2 - \xi_1 > 1\} = \iint\limits_D \frac{1}{\pi}\, dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^1 dx \int_{x+1}^{\sqrt{2x-x^2}+1} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{2x-x^2} - x\right) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$$

№6(ВНИМАНИЕ!!! коэффициенты другие, в остальном все точно так же):

$$\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$$

$$E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2) = 2E(\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2) + 3E(\xi_2 \mid \xi_1 + \xi_2) +$$

$$+ E(\xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2)$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{\frac{\lambda_1^k \cancel{e^{-\lambda_1}}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} \cdot \cancel{e^{-\lambda_2}}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n \cancel{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}}{n!}} = \underbrace{C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}}_{B\left(n,\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}$$

$$E(\xi_1 \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$E(\xi_2 \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\mathbb{P}(\xi_3 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \mathbb{P}\{\xi_3 = k\} \Rightarrow E(\xi_3 \mid \xi_1 + \xi_2 = k) = \lambda_3$$

$$\underbrace{E(2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \mid \eta)}_{\delta} = \frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\eta + \lambda_3$$

$$E\delta = \frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} E\eta + \lambda_3 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$$

$$D\delta = \left(\frac{2\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2 D\eta = \frac{(2\lambda_1 + 3\lambda_2)^2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Вариант 6/16/26

Вариант 6

1) В урне находится 3 красных и 6 белых одинакового размера шаров. Наудачу без возвращения выбирают 4 шара. Пусть ξ — число красных шаров среди отобранных. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Игральная кость брошена 10 раз. Пусть ξ— число выпавших единиц, η — число выпавших пятерок. Найти совместное распределение ξ и η. Вычислить ковариацию ξ и η.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \frac{c}{1+x^2}.$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-1 \le \xi \le 1\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \dfrac{1}{1+\xi^2}$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$.

4) Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите плотность распределения случайной величины $\varsigma = 3\xi - 4\eta + 1$ и вычислите $\mathbf{P}\{0 \le \zeta < 10\}$.

5) Пусть случайные величины ξ, η имеют равномерное распределение на множестве $\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}$. Найти частные распределения. Будут ли ξ, η независимыми? Вычислить $\mathbf{P}\{|\xi-\eta| \le 1$.

6) Совместная плотность распределения $p(x;y)$ случайных величин ξ и η определяется равенством $p(x;y) = 4xy$ при $0 \le x,\ y \le 1$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите $\mathbf{E}(\eta|\xi)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

p(x,y) = 1/pi
p_e(x) = p_n(x) = 1/pi * sqrt(1 - x^2)

не независимые.
P = 1/pi * (pi/2 + 1)

№2.

$n=10$, ξ – число единиц, η – число пятёрок.

совм. распр.?, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

решение: $n=10 \Rightarrow \xi+\eta \le 10$ $0 \le i, j \le 10$.

$$P(\xi=i, \eta=j) = \frac{10!}{i!j!(10-i-j)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{4}{6}\right)^{10-i-j} \quad (*)$$

Пусть $X_i = \begin{cases}1, & \text{если в } i\text{-ом испытании } 1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

$Y_j = \begin{cases}1, & \text{если в } j\text{-ом испытании } 5\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

$\xi = X_1+\ldots+X_{10}$, $\eta = Y_1+\ldots+Y_{10}$

$$E\xi\eta = E\left(\sum_{i=0}^{10} X_i \sum_{j=0}^{10} Y_j\right) = E\left(\sum_{i\ne j} X_iY_j + \overbrace{\sum_{i=1}^{10} X_iY_i}^{=0}\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i\ne j} X_iY_j\right) = \sum_{i\ne j}(EX_i)(EY_j) = (10^2-10)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{9}-\frac{5}{18} = \left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{5}{18}$$

(*) – полиномиальное распределение: $n=10$, $p_1=\frac{1}{6}$, $p_2=\frac{1}{6}$

для ξ и η одинаковое распределение $B(n,p)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow E\xi = E\eta = p\cdot n = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi\cdot E\eta = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{18} - \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = -\frac{5}{18}$$

Ответ: $P(\xi=i, \eta=j) = \frac{10!}{j!\,i!\,(10-i-j)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{4}{6}\right)^{10-i-j}$;

$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -\frac{5}{18}$

+

Вариант 6.

① ξ принимает значения $0, 1, 2, 3$

$P\{\xi=0\} = \frac{C_6^4}{C_9^4} = \frac{5}{42}$ $\quad P\{\xi=1\} = \frac{C_6^3 \cdot C_3^1}{C_9^4} = \frac{10}{21}$

$P\{\xi=2\} = \frac{C_6^2 C_3^2}{C_9^4} = \frac{5}{14}$ $\quad P\{\xi=3\} = \frac{C_6^1 \cdot C_3^3}{C_9^4} = \frac{1}{21}$

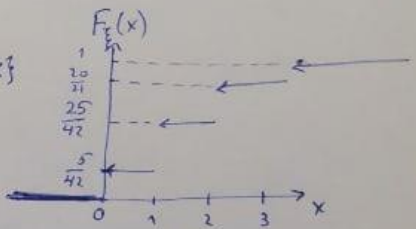
$E\xi = 0 \cdot \frac{5}{42} + 1 \cdot \frac{10}{21} + 2 \cdot \frac{5}{14} + 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{3}$

$E\xi^2 = 0^2 \cdot \frac{5}{42} + 1^2 \cdot \frac{10}{21} + 2^2 \cdot \frac{5}{14} + 3^2 \cdot \frac{1}{21} = \frac{7}{3}$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{7}{3} - \frac{16}{9} = \frac{5}{9}$

ξ	0	1	2	3
	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$



③ $p_\xi(x) = \frac{C}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1 \iff C \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \iff C \cdot \pi = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi}$

$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$

$P\{-1 \le \xi \le 1\} = F_\xi(1) - F_\xi(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\eta = \frac{1}{1+\xi^2}$ $\quad \eta$ принимает значения от 0 до 1 $\Rightarrow p_\eta(x) = 0$ при $x \notin (0,1)$

$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\left\{\frac{1}{1+\xi^2} < x\right\} = P\left\{\frac{1}{x} < 1+\xi^2\right\} = P\left\{\frac{1}{x} - 1 < \xi^2\right\} =$

$= P\left\{\xi > \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} + P\left\{\xi < -\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} = 1 - P\left\{\xi \le \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} + P\left\{\xi < -\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} =$

$= 1 - P\left\{\xi < \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} - P\left\{\xi = \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\} + P\left\{\xi < -\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right\}$

$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = -p_\xi\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} - p_\xi\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} =$

$= \frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ при $x \in (0,1)$

$\cancel{E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\xi^2} p_\xi(x)dx}$

Вольфорам

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot p_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

Вольфорам

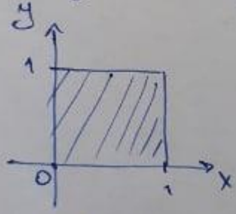
$$E\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 p_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{x(3x^2+5)}{(x^2+1)^2} + 3\operatorname{arctg} x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{3\pi}{1} = \frac{3}{8}$$

$$D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

6

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = 4x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2x$$

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \int_0^1 4xy\,dx = 2y$$

$p(x,y) = p_\xi(x)\cdot p_\eta(y) \Rightarrow \xi$ и η независимые $\Rightarrow$

$$E(\eta|\xi) = E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot p_\eta(y)dy = \int_0^1 2y^2dy = 2\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(E(\eta|\xi)) = \frac{2}{3} \qquad D(E(\eta|\xi)) = 0$$

№4 вар. 6

$\xi \perp\!\!\!\perp \eta \sim N(0,1)$

$\zeta = 3\xi - 4\eta + 1$

$\xi_1 = 3\xi + 1 \Rightarrow p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{3} p_\xi\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$

$\eta_1 = -4\eta \Rightarrow p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{4} p_\eta\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{32}}$

т.о. $\xi_1 \sim N(1, 9)$; $\eta_1 \sim (0, 16)$

$\Rightarrow \xi_1 + \eta_1 \sim N(a, \sigma^2)$

$E(\xi_1 + \eta_1) = a = 3E\xi - 4E\eta + E1 = 1$

$D(\xi_1 + \eta_1) = \sigma^2 = D\xi_1 + D\eta_1 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

т.о. $\zeta \sim N(1, 5^2)$

$P\{0 \le \zeta \le 10\} =$

$P\{0 \le \xi \le 10\} = \int_{-0,2}^{9/5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_0(0,2) +$

$+ \Phi_0(1,8) = 0,4641 + 0,0793 = 0,5434$

Вар 6 N5

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

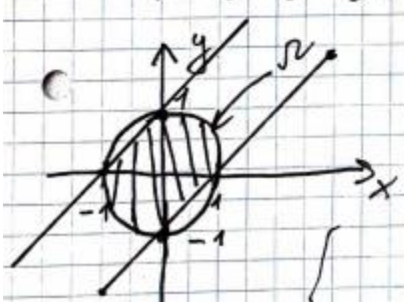
$$\boxed{p_\eta(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}}$$

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \boxed{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}}$$

$p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) \neq p(x,y) \Rightarrow \xi$ и η – <u>зависимы</u>

$$\mathbb{P}\{|\xi-\eta| \le 1\} = \iint\limits_{|x-y|\le 1} p(x,y)\,dx\,dy \;=$$



$$= \iint\limits_{\substack{|x-y|\le 1 \\ x^2+y^2\le 1}} \frac{1}{\pi}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\iint\limits_{\substack{|x-y|\le 1 \\ x^2+y^2\le 1}} 1 \cdot dx\,dy}_{\text{площадь заштрихованной области}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}}$$

$$S(\Omega) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$$

Вариант 7

1) Стрелок проводит 3 выстрела по мишени. Вероятность попасть при каждом выстреле в десятку равна 0.8, в девятку – 0.1, в восьмерку 0.1. Пусть ξ— число набранных очков. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Пусть ξ и η — независимые случайные величины с одинаковым геометрическим распределением. Найти распределение случайной величины $\xi + \eta$.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} ce^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-1 \leq \xi \leq 0.5\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1 - e^{-2\xi}$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η равна $p(x, y) = 10x^2y$, если $0 \leq y \leq x \leq 1$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите плотности распределения ξ и η и вычислите $cov(\xi; \eta)$.

6) Совместная плотность распределения $p(x; y)$ случайных величин ξ и η определяется равенством $p(x; y) = 1/2$ при $\{(x, y)|\ |x| + |y - 1| \leq 1\}$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите $\mathbf{E}(\xi|\eta)$, вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

№ 2:

№3

[illegible]

3) $p_\xi(x) = \begin{cases} Ce^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 \end{cases}$

$C\int_0^{+\infty} e^{-2x} = 1; \quad -\frac{1}{2}C\left(e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} = 1$

$C = 2$

$p_\xi(x) = 2e^{-2x}$

$F_\xi(x) = 2\int_0^x e^{-2y}\,dy = -\left(e^{-2y}\right)\Big|_0^x = +\left(1 - e^{-2x}\right)$

$P(-1 \leq \xi \leq 0{,}5) = F_\xi(0{,}5) - F_\xi(-1) = e^{2} - e^{-1}$

$\eta = 1 - e^{-2\xi} \in [0,1]$

$F_\eta = P(1 - e^{-2\xi}) = P(1 - x < e^{-2\xi}) = P\left(\xi < \frac{-\ln(1-x)}{2}\right)$

$\ln(1-x) < -2\xi$

$= F_\xi\left(-\frac{\ln(1-x)}{2}\right)$

$p_\eta = (F_\eta)' =$

$= \left(1 - e^{+\ln(1-x)}\right)' = (1 - 1 + x)' = 1$

$E\xi = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$D\xi = \frac{1}{12}$

№ 4:

④ $\xi, \eta \sim N(0,1)$

$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

$$F_\zeta(z) = P(\xi^2 + \eta^2 < z^2) \underset{[z>0]}{=} \iint\limits_{x^2+y^2<z^2} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{т.к. } \xi,\eta - \text{нез}}{=} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{x^2+y^2<z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr \underset{[u=r^2]}{=} \frac{1}{2} \int_0^{z^2} e^{-\frac{u}{2}}\,du = -e^{-\frac{u}{2}}\Big|_0^{z^2} = 1 - e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\Rightarrow p_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = z e^{-\frac{z^2}{2}},\ z>0 \Rightarrow p_\zeta(z) = \begin{cases} z e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\zeta = \int_0^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{2\pi} \cdot D\varphi, \text{ где } \varphi \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\zeta = \sqrt{2\pi} \cdot 1 = \sqrt{2\pi}$$

$$E\zeta^2 = \int_0^{+\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \underset{[u=z^2]}{=} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u(-2) e^{-\frac{u}{2}} + 2(-2) e^{-\frac{u}{2}} \right)\Big|_0^{+\infty} =$$

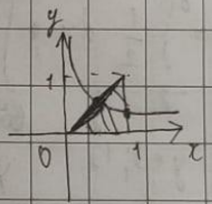
$$= 2$$

$$\Rightarrow D\zeta = 2 - 2\pi$$

№ 5 : находим частные распределения - и частные матожидания из решения снизу находим матожидание произведения

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 10x^2y, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \mathbb{R}^2\setminus\{0\le y\le x\le 1\} \end{cases}$$

$$F_{\xi\eta}(z) = \iint\limits_{\substack{xy\le z\\ 0\le y\le x\le 1}} 10x^2y\,dx\,dy \underset{z\in[0;1]}{=}$$



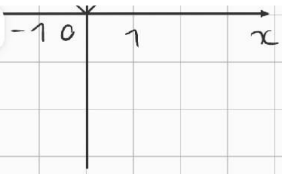
$$\begin{cases} xy = z \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{z}$$

$$= 10\left(\int_0^{\sqrt{z}} x^2dx\int_0^x y\,dy + \int_{\sqrt{z}}^1 x^2dx\int_0^{\frac{z}{x}} y\,dy\right) =$$

$$= 10\left(\frac12\int_0^{\sqrt{z}} x^4dx + \frac12\int_{\sqrt{z}}^1 z^2dx\right) = z^{\frac52} + 5z^2(1-\sqrt{z}) =$$

$$= z^2(5-4\sqrt{z}) \Rightarrow p_{\xi\eta}(z) = \begin{cases} 10z - 10z^{\frac32} = 10z(1-\sqrt{z}), & z\in[0;1] \\ 0, & z>1 \end{cases}$$

№6:



$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac12\int_{-y}^{y} dx = y, & y\in[0,1] \\ \frac12\int_{y-2}^{2-y} dx = 2-y, & y\in[1,2] \end{cases}$$

$$p_{\xi|\eta=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & y\in(0,1], & x\in[-y;y] \\ \frac{1}{2(2-y)}, & y\in[1;2), & x\in[y-2;2-y] \end{cases}$$

$$E(\xi|\eta=y) = \begin{cases} 0, & y\in[0;1] \\ 0, & y\in[1;2] \end{cases} \Rightarrow E(\xi|\eta)=0$$

Вариант 8/18/28

Вариант 18

1) В связке находится 4 одинаковых с виду ключа, но лишь один подходит к данной двери. После каждой попытки открыть дверь неподошедший ключ отодвигается в сторону и пробуется новый, пока дверь не откроется. Пусть ξ — число сделанных попыток. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2) Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей

$\xi \cdot \eta$	0	1	2
-1	0.1	0	0.1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.1	0.2

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi^2 + \eta$. Вычислить $cov\,(\xi + 3\eta, 2\xi - \eta)$.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-0.25 \leq \xi \leq 1\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta, \mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ распределена равномерно на $[0, 2]$, а η имеет равномерное распределение на $[-1, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен внутри треугольника с вершинами $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 0)$ на плоскости XOY. Найдите плотности компонент случайного вектора и вычислите $\mathbf{P}\{\xi + \eta < 0.\}$

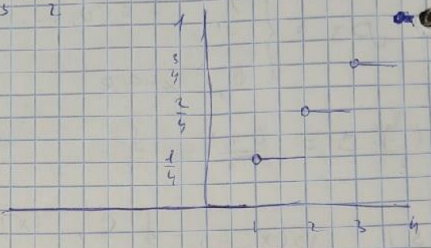
6) Совместная плотность распределения $p(x; y)$ случайных величин ξ и η при $0 \leq y \leq x$ определяется равенством $p(x; y) = e^{-x}$ и равна 0 в остальных точках плоскости. Найдите $\mathbf{E}(\eta|\xi)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

№ 1 2 3 (3 недоделан):

В 3 1)

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



$E\xi = (1+2+3+4)\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

$E\xi^2 = (1+4+9+16)\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{2}$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

2)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
-1	0.1	0	0.1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.1	0.2

ξ^2	0	1
P	0.3	0,7

$\xi^2+\eta$	0	1	2	3
P	0.1	0,5	0.1	0,3

$cov(\xi+2\eta, 2\xi-\eta) = cov(\xi, 2\xi-\eta) + 2cov(\eta, 2\xi-\eta)$

$= 2D(\xi) - 2cov(\xi,\eta) + 4cov(\xi,\eta) - 2D(\eta) =$

$= 2(D(\xi) - D(\eta) + 2cov(\xi,\eta))$

ξ	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

η	0	1	2
P	0,4	0,3	0,3

$E\xi = -0,2 + 0,5 = 0,3$ $\quad$ $E\eta = 0,9$

$E\xi^2 = 0,7$ $\quad$ $E\eta^2 = 1,5$

$D(\xi) = \cancel{0,07}\ 0,61$ $\quad$ $D(\eta) = 0,69$

$cov(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = (-2\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2)$

$- 0{,}3\cdot 0{,}9 = 0{,}03$

$cov(\xi+2\eta,\ 2\xi-\eta) = 2(0{,}61 - 0{,}69 + 0{,}03) = -0{,}1$

3)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^2 & x\in[-1,2] \\ 0, & x\notin[-1,2] \end{cases}$$

$$c\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dx = c\int_{-1}^{2} x^2\,dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = c\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) =$$

$= 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{x} x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{x} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{x} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{x^3+1}{9}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{9}, & x\in[-1,2] \\ 0, & x\le -1 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

$$P\{-0{,}25\le\xi\le 1\} = F_\xi(1) - F_\xi(-0{,}25) = \frac{2}{9} - \frac{7}{64} =$$

$= \frac{65}{576}$

$\eta = |\xi|$

$F_\eta(x) = P(\eta<x) = P(|\xi|<x) = P(-\xi<x<\xi) =$

$= F_\xi(x) - F_\xi(-x)$

$p_\eta(x) = p_\xi(x) + p_\xi(x) = 2p_\xi(x) = \frac{2}{9}(x^3+1)$

$$E\eta = \int_{-1}^{2}|x|\cdot\frac{x^3+1}{9}\,dx = \frac{1}{9}\left(\int_0^2 x^4+x\,dx - \int_{-1}^{0} x^4+x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{42}{5}-\frac{3}{10}\right) = \frac{9}{10}$$

B8 – 3) ~~(...)~~

$$\int_{-1}^{2} cx^2 dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = c\frac{9}{3} = 1 \Rightarrow c = 1/3$$

$$F_\xi(x) = \int_{-1}^{x} p_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{x} \frac{3}{9} x^2 dx = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9} & -1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

$$P\{-0{,}25 \le \xi < 1\} = F(1) - F(-1/4) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9 \cdot 4^3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{193}{576}$$

p_η – ? $\quad \eta = |\xi|$.

① $0 \le x \le 2$

② $F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{|\xi| < x\} = P\{-x < \xi < x\} = F(x) - F(-x)$.

③ $p_\eta = (F_\eta(x))' = (F_\xi(x) - F_\xi(-x))' = p_\xi(x) - p_\xi(-x) \cdot -1 =$

$p_\xi(x) + p_\xi(-x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^2$

$$\Rightarrow \quad p_\eta = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > 2 \\ \frac{2}{3}x^2 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$E\eta = \int_0^2 x \frac{2}{3} x^2 dx = \cancel{\frac{2}{9} x^3 \Big|_0^2 = \frac{16}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$D\eta = \int_0^2 x^2 \frac{2}{3} x^2 dx - \frac{8^2}{3^2} = \frac{2^6}{15} - \frac{2^6}{9} = -\frac{128}{45}$$

В8 №4

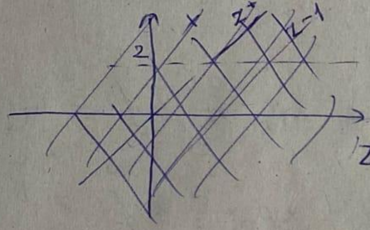
$\xi \sim U([0,2])$ $\quad p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0,2] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

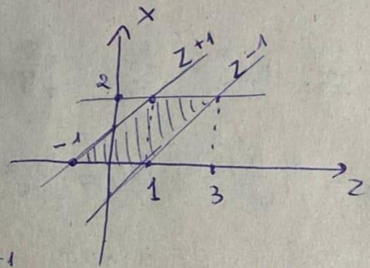
$\xi \sim U([-1;1])$ $\quad p_\eta(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in [-1;1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\zeta = \xi + \eta \quad \Rightarrow p_\zeta - ?$

свер. $\quad p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-x) \, p_\eta(x) \, dx$ ① ②

① $\begin{cases} -1 \le z - x \le 1 \\ 0 < x \le 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - x \le 1 \\ z - x \ge -1 \\ x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge z-1 \\ x \le z-1 \\ x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$





$\Rightarrow -1 \le z \le 1 \Rightarrow \int\limits_0^{z+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{4} x \Big|_0^{z+1} = \frac{z+1}{4}$

$1 \le z \le 3 \rightarrow \int\limits_{z-1}^{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{4} x \Big|_{z-1}^{2} = \frac{3-z}{4}$

$\Rightarrow p_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{z+1}{4}, & -1 \le z < 1 \\ \frac{3-z}{4}, & 1 \le z \le 3 \\ 0, & z > 3 \end{cases}$

$E\zeta = E(\xi) + E(\eta) = 1$

$D\zeta = E\zeta^2 - (E\zeta)^2 = D(\xi) - D(\eta) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

Вз №6

$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \le y \le x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\qquad E(\xi|\eta)$ — ?

$D(\xi|\eta)$ — ?

$p_{\xi|\eta} = p(x) = \dfrac{p_{\xi\eta}(x,p)}{p_\eta(p)}$

$p_\eta(x) = \int_y^{+\infty} e^{-x}dx = -(e^{-x})\Big|_y^{+\infty} = e^{-y}, \ y \ge 0$

$p_{\xi|\eta} = p(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-y}}, \quad 0 \le p \le x$

$E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \dfrac{e^{-x}}{e^{-y}} dx = e^y \int_y^{+\infty} x e^{-x} dx = e^y\left(-(e^{-x}x)\Big|_y^{+\infty} - (e^{-x})\Big|_y^{+\infty}\right) = y + 1$

$\Rightarrow E(\xi|\eta) = \eta + 1$ — Ответ:

$E(\eta+1) = E\eta + E1 = E\eta + 1 = 1 + 1 = 2$

$E\eta = \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} dy = \left(-(y \cdot e^{-y})\Big|_0^{+\infty} - (e^{-y})\Big|_0^{+\infty}\right) = 1$

$D(\eta+1) = D(\eta) = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 2 - 1 = 1$

$E\eta^2 = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \left(-(y^2 \cdot e^{-y})\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2y e^{-y} dy = 2$

Здесь надо было найти E(n|e)
найди, если не трудно)
не досчитал, проверьте(!)

$p_{\eta|\varepsilon} = p(x) = \dfrac{p(x,y)}{p_\varepsilon}$

$p_\varepsilon = \int_0^x e^{-x} dy = +e^{-x}(x)$

$p_{\eta|\varepsilon} = \dfrac{+e^{-x}}{e^{-x} \cdot x} = +\dfrac{1}{x}$

$E(\eta|\varepsilon = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dy = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x =$

$= \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$

$E\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) = \dfrac{E\varepsilon}{2} = \dfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

...

Вариант 9

1) В урне находятся 2 белых и 1 красный шар. Из урны наудачу извлекают шар. Если шар оказался белого цвета, то его снова помещают в урну и проводят новый выбор шара. Если выбран красный шар, то процедуру выбора прекращают. Пусть ξ — число проведенных извлечений. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) Проводится две серии по n бросаний симметричной монеты. Пусть ξ — число выпавших гербов в первой серии, η — число выпавших гербов во второй серии. Найти $\mathbf{P}\{\xi < \eta\}$.

3) Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta$, $\mathbf{D}\,\eta$, $\mathbf{P}\{0.25 \le \xi^2 \le 4\}$.

4) Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ имеет показательное распределение с параметром a, а η — показательное распределение с параметром b. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \min(\xi, \eta)$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) Случайный вектор ξ, η распределен равномерно на множестве $M = \{(x, y) \mid |x-1| + |y-1| \le 1\}$ координатной плоскости XOY. Найдите $F_{\xi,\eta}(\frac{1}{2}; 1)$. Являются ли ξ и η независимыми?

6) Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет совместную плотность распределения

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Найдите $\mathbf{E}(\xi_1 | \xi_1 + \xi_2)$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

№5:

(5) $p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$

$\eta_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2$

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \xi_2 \\ \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\eta_2 + \eta_1}{2} \\ \xi_2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \end{cases} \quad |J| = \left\| \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$p_{\eta_1, \eta_2}(y_1, y_2) = p_{\xi_1, \xi_2}\left(\frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right) \cdot |J| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{8}(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)}$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2, \quad c = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{4}$$

1) $p_{\eta_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}} dy_2 =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y_2^2}{4}} dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{4}} dy_2}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4}} \sim N(0, \sqrt{2}) \quad 2$$ Указывают ДП

Аналогично $\eta_2 \sim N(0, \sqrt{2})$ 2

2) Т.к. коэффициент корреляции явно присутствует в формуле для двумерного распределения, т.е.

$$\frac{1}{4\pi} = c = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \rho = 0$$

Значит, $\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0$. $E\eta_1 = \mu = 0$, $D\eta_1 = \sigma_1^2 = \sqrt{2}$ 2

№6

$$\xi_1, \xi_2 \sim N(0,1) \Rightarrow \xi_1+\xi_2 \sim N(0,2)$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} \Rightarrow p_{\xi_1|\xi_1+\xi_2=y}(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\pi} e^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2} \Rightarrow \xi_1 | \xi_1+\xi_2=y \sim N\left(\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{E(\xi_1 | \xi_1+\xi_2=y)}_{\delta} = \frac{1}{2}y \Rightarrow E(\xi_1 | \xi_1+\xi_2) = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$$

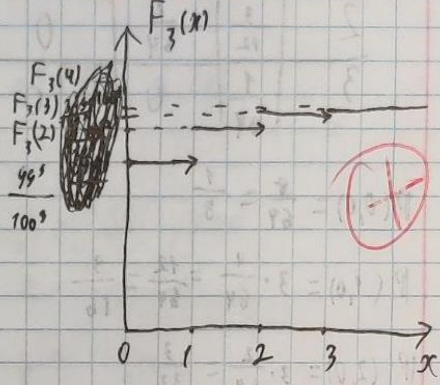
$$E(\delta) = \frac{E\xi_1+E\xi_2}{2} = 0, \quad D(\delta) = \frac{1}{4}(D\xi_1+D\xi_2) = \frac{1}{2}$$

ВАРИАНТ 10

205

$$\mathbb{P}\{\xi = x\} = C_3^x\, 0{,}01^x \cdot 0{,}99^{3-x}$$

ξ	0	1	2	3
$P(\xi)$	$\left(\frac{99}{100}\right)^3$	$\frac{3\cdot 99^2}{100^3}$	$\frac{3\cdot 99}{100^3}$	$\frac{1}{100^3}$



где $F_\xi(2) = \frac{99^3+3\cdot 99^2}{100^3}$, $F_\xi(3) = \frac{99^3+3\cdot 99^2+297}{100^3}$, $F_\xi(4) = 1$

$$E\xi = \frac{3\cdot 99^2+594+3}{100^3} = \frac{3\cdot 99^2+597}{100^3} = \frac{30000}{100^3} = \frac{3}{100}$$

$$E\xi^2 = \frac{3\cdot 99^2+1188+9}{100^3} = \frac{3\cdot 99^2+1197}{100^3}$$

$$D\xi = D\xi^2 - (D\xi)^2 = \frac{(3\cdot 99^2+1197)\cdot 100^3 - (3\cdot 99^2+597)^2}{100^6} =$$

$$= \frac{297}{10\,000}$$

②

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3
0	$\frac{8}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	0
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0	0
3	$\frac{1}{64}$	0	0	0

...

всего $4^3 = 64$ варианта

$\mathbb{P}(0,0) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(1,0) = 3 \cdot \frac{4}{64} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(2,0) = 3 \cdot \frac{2}{64} = \frac{3}{32}$

$\mathbb{P}(3,0) = \frac{1}{64}$

$\mathbb{P}(1,1) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{64} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(2,1) = 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$

$1+3+3+1+6+12+6+12+12+8 =$

$= 8 + 24 + 32 = 64$

$\mathbb{P}(\xi = \eta) = \frac{8}{64} + \frac{3}{16} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

$E\xi = E\eta = \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64}\right) + 2\left(\frac{3}{32} + \frac{3}{64}\right) + \frac{3}{64} = \frac{12+12+3+18+3}{64} =$

$= \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$

$E\xi\eta = \frac{3}{16} + 2\left(\frac{3}{64} + \frac{3}{64}\right) = \frac{12+12}{64} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = \frac{3}{8} - \frac{9}{16} = -\frac{3}{16}$

③ $p_\xi(x) = c\, e^{-|x|}$

$$1 = F_\xi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t)\,dt = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = 2c\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt =$$

$$= 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t}\,dt, & x<0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt, & x\geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x<0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x<0 \\ \frac{1}{2}(2-e^{-x}), & x\geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\{-1\leq \xi \leq 2\} = F_\xi(2) - F_\xi(-1) = \frac{1}{2}\left(2-e^{-2}-e^{-1}\right)$$

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{2|\xi| < x\} \overset{x\geq 0}{=} \mathbb{P}\left\{-\frac{x}{2} < \xi < \frac{x}{2}\right\} = F_\xi\left(\frac{x}{2}\right) - F_\xi\left(-\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2-e^{-\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right) = 1-e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow p_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$$E\eta = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

+

$$\mathbb{E}\eta^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)\right)\Bigg|_{x\geq 0} =$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow D\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{8^2} = \frac{31}{64}$$

ВАРИАНТ 10 (2018)

Вариант 10

1) Известно, что доля выигрышных лотерейных билетов в тираже составляет 1%. Некто купил 3 билета. Пусть ξ — число выигрышных среди купленных билетов. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\,\xi$, $\mathbf{D}\,\xi$.

2) В лифт пятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом из четырех этажей. Пусть ξ — число вышедших людей на последнем пятом этаже, η — число вышедших на четвертом этаже. Найти совместное распределение ξ и η. Вычислить $\mathbf{P}\{\xi = \eta\}$.

3) Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = ce^{-|x|}.$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{-1 \le \xi \le 2\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 2|\xi|$, вычислить $\mathbf{E}\,\eta$, $\mathbf{D}\,\eta$.

4) Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

параметр $a > 0$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, $\mathbf{E}\,\zeta$, $\mathbf{D}\,\zeta$.

5) В условиях предыдущей задачи при $a = 1$ найти $cov(\xi + \eta, \xi - \eta)$ и вычислить $\mathbf{P}\{\xi + \eta < 4,\ \xi - \eta < 2\}$.

№ 1 2 3 4

B10 1) $p = 0,01 \quad q = 0,99$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = C_3^k p^k q^{3-k}$$

$\cancel{\begin{array}{c|cccc} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & \frac{99}{100}^3 & & & \end{array}}$

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{99}{100}^3$	$3\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{99}{100}^2$	$3\cdot\frac{1}{100}^2\cdot\frac{99}{100}$	$\frac{1}{100}^3$

$$E\xi = 3\cdot\frac{1}{100}\frac{99}{100}^2 + 2\cdot 3\cdot\frac{1}{100}^2\cdot\frac{99}{100} + \frac{1}{100}^3 = 3\cdot 0,01\cdot 0,99^2 +$$

$$+ 3\cdot 0,01^2\cdot 0,99 + 3\cdot 0,01^3 = 3\cdot 0,01\cdot 0,99 + 3\cdot 0,01^3 =$$

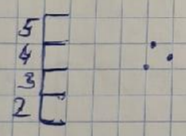
$$= 3(0,01\cdot 0,99 + 0,01^3) \approx 0,03$$

$$E\xi^2 = 3\cdot 0,01\cdot 0,99^2 + 4\cdot 3\cdot 0,01^2\cdot 0,99 + 9\cdot 0,01^3 =$$

$$= 3\cdot 0,01\cdot 0,99\cdot 1,03 + 9\cdot 0,01^3 = 0,00279$$

$$D = E\xi^2 - (E\xi)^2 \approx 0,002763$$

2)



ξ - число вышедших на последнем

η - число вышедших на предпоследнем

$$\mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{3\cdot 2^2}{4^3} = \frac{3}{16} = \mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 1)$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{3\cdot 2}{4^3} = \frac{3}{32} = \mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 2)$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{3\cdot 2\cdot 2}{4^3} = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 2) = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64} = \mathbb{P}(\xi = 2, \eta = 1)$$

$$\mathbb{P}(\xi = 3, \eta = 0) = \frac{1}{64} = \mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 3)$$

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	0
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0	0
3	$\frac{1}{64}$	0	0	0

$\mathbb{P}(\xi = \eta) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$

3) $p_\xi(x) = ce^{-|x|}$

$c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2c \cdot (-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} =$

$= 2c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad F = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx$

$\cancel{F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}}$

$F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\mathbb{P}\{-1 \leq \xi \leq 2\} = F_\xi(2) - F_\xi(-1) = 1 - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} =$

$= 1 - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-1}}{2}$

$E\eta \quad \eta = 2|\xi|$

$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}\{2|\xi| < x\} = \mathbb{P}\{-\frac{x}{2} < \xi < \frac{x}{2}\} =$

$= F_\xi(\frac{x}{2}) - F_\xi(-\frac{x}{2})$

$p_\eta(x) = \frac{1}{2}p_\xi(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}p_\xi(-\frac{x}{2})$

$F_\eta(z) = \int_{2|x|<z} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2\int_0^{\frac{z}{2}} \frac{1}{2}e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{\frac{z}{2}} = 1 - e$

$p_\eta(z) = F'_\eta(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z \geq 0$

$\cancel{E\eta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z}{2}} dz = \frac{1}{2}(z e^{-\frac{z}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}$

$E\eta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z}{2}} dz = -(z e^{-\frac{z}{2}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{2}} dz) = 2$

$D\eta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z}{2}} dz = 8$

4) ξ, η — н.с.в.

$p_\xi(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad p_\eta(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$y = \frac{\xi}{\eta}$

$F_\eta(z) = a^2 \iint\limits_{\frac{x}{y} < z} e^{-ax-ay} dx\, dy = a^2 \int_0^{+\infty} dy \int_0^{yz} e^{-ax-ay} dx =$

$= a^2 \int_0^{+\infty} e^{-ay} dy \int_0^{yz} e^{-ax} dx = -a \int_0^{+\infty} e^{-ay} (e^{-ax}) \Big|_0^{yz} dy =$

$= -a \int_0^{+\infty} e^{-ay}(e^{-ayz} - 1) dy = -a \int_0^{+\infty} e^{-ay(z+1)} - e^{-ay} dy =$

$= 1 - \frac{1}{z+1}, \quad z \geq 0$

$p_\xi(z) = +\frac{1}{(z+1)^2}, \quad z \geq 0$

$E\xi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(z+1)^2} dz = \int_0^{+\infty} \frac{z}{(z+1)^2} dz =$ расх-ся $\Rightarrow \nexists\, E\xi, D\xi$

5) $cov(\xi+\eta, \xi-\eta) = cov(\xi, \xi-\eta) + cov(\eta, \xi-\eta) =$

$= D(\xi) - cov(\xi,\eta) + cov(\xi,\eta) - D(\eta) = D(\xi) - D(\eta)$

$= 0$???